Uma Introdução à Integral de Kurzweil-Henstock

A noção de integral foi introduzida por I. Newton e G. Leibniz no século XVII, formalizada por B. Riemann na metade do século XIX e generalizada por vários matemáticos, em especial por H. Lebesgue, no começo do século XX.

A integral de Riemann apresenta algumas limitações. Por exemplo, é preciso estendê-la, definindo integrais impróprias, para lidar com funções ou intervalos ilimitados; o limite pontual de uma sequência monótona de funções integráveis não é, em geral, integrável; nem toda função Riemann-integrável possui primitiva (e. g. a Função de Thomae); e nem toda derivada é Riemann-integrável (e. g. a Função de Volterra).

A busca por uma noção mais abrangente de integral, que eliminasse as deficiências da integral de Riemann, motivou intensa pesquisa no final do século XIX e no começo do século XX. A extensão mais bem-sucedida foi a de Lebesgue, com a introdução da Teoria da Medida. Embora seja mais geral do que a integral de Riemann, a integral de Lebesgue ainda apresenta dificuldades: sua construção é longa e trabalhosa; integrais impróprias condicionalmente convergentes, como a integral de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, não são cobertas pela integral de Lebesgue; e nem toda derivada é Lebesgue-integrável.

Também no começo do século XX, A. Denjoy e O. Perron introduziram independentemente uma noção de integral que estende a integral de Lebesgue, inclui integrais impróprias condicionalmente convergentes e segundo a qual toda derivada é integrável. Mais tarde, entre o final da década de 1950 e o começo da década de 1960, J. Kurzweil e R. Henstock apresentaram uma nova abordagem para a integral de Denjoy-Perron, com uma pequena modificação da definição da integral de Riemann clássica. Esta integral, chamada de *integral de Kurzweil-Henstock* ou *integral de Riemann generalizada*, estende simultaneamente as integrais de Riemann e de Lebesgue e as integrais impróprias, bem como admite versões generalizadas de resultados clássicos como o Teorema Fundamental do Cálculo, a Fórmula de Taylor com Resto Integral e os Teoremas da Convergência Monótona e da Convergência Dominada.

O objetivo deste minicurso é apresentar brevemente a definição da integral de Kurzweil-Henstock e alguns dos seus resultados principais, traçando, sempre que possível, um paralelo com o contexto clássico.

Referências

[1] R. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 32 (2001).

[2] R. Bartle, D. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition, Wiley (2011).